Archimède face à l'innombrable

Ilan Vardi*

ΨΑΜΜΙΤΗΣ

Οἴονταί τινες, βασιλεῦ Γέλων, τοῦ ψάμμου τὸν ἀριθμὸν ἄπειρον εἶμεν τῷ πλήθει· λέγω δὲ οὐ μόνον τοῦ περὶ Συρακούσας τε και τὰν ἄλλαν Σικελίαν ὑπάρχοντος, ἀλλὰ καὶ τοῦ κατὰ πᾶσαν χώραν τάν τε ὀικημέναν καὶ τὰν ἀοίκητον. ᾿Εντί τινες δέ, οἳ αὐτὸν ἄπειορον μὲν εἶμεν οὐχ ὑπολαμβάνοντι, μηδένα μέντοι ταλικοῦτον κατωνομασμένον ὑπάρχειν ἀριθμόν, ὅστις ὑπερβάλλει τὸ πλῆθος αὐτοῦ. Οἱ δὲ οὕτως δοξάζοντες δῆλον ὡς, εἰ νοήσαιεν ἐκ τοῦ ψάμμου ταλικοῦτον ὄγκον συγκείμενον τὸ μέγεθος, ἁλίκος ὁ τᾶς γᾶς ὄγκος ἀναπεπληρωμένων ἐν αὐτῷ τῶν τε πελάγεων πάντων και τῶν κοιλωμάτων τᾶς γᾶς εἰς ἴσον ὕψος τοῖς ὑψηλοτάτοις τῶν ὀπέων, πολλαπλασίως μὴ γνώσονται μηδένα κα ῥηθῆμεν ἀριθμὸν ὑπερβάλλοντα τὸ πλῆθος αὐτοῦ. ᾿Εγὼ δὲ πειρασοῦμαί τοι δεικνύειν δι' ἀποδείξιων γεομετρικᾶν, αἷς παρακολουθήσεις, ὅτι τῶν ὑφ' ἁμῶν κατωνομασμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκδεδομένων ἐν τοῖς ποτὶ Ζεύξιππον γεγραμμένοις ὑπερβάλλοντί τινες ὀυ μόνον τὸν ἀριθμὸν τοῦ ψάμμου τοῦ μέγεθος ἔχοντος ἴσον τᾷ γᾷ πεπληρωμένᾳ, καθάπερ εἴπαμες, ἀλλὰ καὶ τὸν τοῦ μέγεθος ἴσον ἔχοντος τῷ κόσμῳ.

L'ARÉNAIRE

Certains estiment, roi Gélon, que le nombre de grains de sable est infiniment grand, et j'entends non seulement le sable des environs de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répendu dans toute la terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en admettant que ce nombre n'est pas infiniment grand, pense qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité des grains de sable. Cependant, si ceux qui sont de cet avis s'imaginaient un volume de sable égal à celui de la terre, ce volume comprenant toutes les mers et les vallées de la terre remplies de sable jusqu'aux plus hautes montagnes, il est évident qu'ils reconnaîtraient encore beaucoup moins qu'on puisse énoncer un nombre dépassant le nombre de ces grains de sable. Or je tâcherai de te montrer, par des démonstrations géométriques que tu pourras suivre, que parmi les nombres que j'ai énoncés et exposés dans mes écrits adressés à Zeuxippe, il y en a qui dépassent non seulement le nombre de grains de sable dont le volume serait égal à celui de la terre remplie de la manière que nous avons indiquée, mais même ayant un volume égal à celui du monde.

*IHES, 35, route de Chartres, 91440 Bures sur Yvette, France, ilan@ihes.fr

C'est ainsi qu'Archimède (287–212 avant J.–C.) commence *L'Arénaire.* Comme on peut le constater, Archimède écrit un article de vulgarisation scientifique, et le lecteur ne pourrait faire mieux que de continuer la lecture directe du texte d'Archimède. Heureusement pour les francophone, les œuvres d'Archimède sont complètement accessible en texte bilingue aux Belles Lettres.

L'Arénaire d'Archimède est le premier article de vulgarisation jamais écrit et d'après moi, c'est aussi un des meilleurs article jamais écrit. Dans cet article adressé à son roi, Archimède contredit la notion courante dans son temps, que le sable était infini ou trops nombreux pour être compté. Cette notion est présente dans la litérature grecque, par exemple dans Pindare (5ème siècle avant J.–C.).

> *Mais le sable échappe au calcul : les joies aussi que cet homme a donné aux autres, qui pourrait en dire le nombre?*
>
> Pindare, deuxième chant Olympique

Cette conception est aussi présente dans la bible où il y a 21 références à la non dénombrabilité du sable. De plus, ceci démontre que, bien que les œuvres d'Archimède sont entrées dans l'ésprit collectif de l'humanité ($\pi = 3,14\ldots$), L'Arénaire, son article le plus accessible, n'a eu auncun effet dans son temps, car on trouve encore des citations dans le nouveau testament, écrit quelque centaines d'années après sa mort.

> *naquirent des descendants comparables par leur nombre aux étoiles du ciel et aux grains de sable sur le rivage de la mer, innombrables.*
>
> Hébreux 11:12

Par contre, on se rend compte que toute connaissance scientifique a été ignorée, car il est facile d'éstimer que le nombre d'étoiles visibles à l'œil nu est inférieur à dix mille, ce qui était bien connu par les astronomes de l'époque : les catalogues d'étoiles d'Érastosthène (2ème siècle avant J.–C.) et de Ptolémée (2ème siècle) ont survécus. Le lecteur sera rejouit que de telles erreurs ne sont pas reproduite dans la bible des Mormons (19ème siècle).

Dans son article, Archimède démontre que cette notion est fausse en donnant un nombre qui depasse le nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable. Ceci demande plusieurs choses, qui sont toutes accomplies admirablement par Archimède. D'abords, il faut donner une définition "d'univers" et pour ne pas être dépassé, Archimède choisi le plus grand modèle connu dans son temps, le système héliocentrique d'Aristarque. Cette partie du texte est complètement physique et expérimentale. Ensuite, il faut developer un systeme de numeration qui est capable de produire des nombres assez élevés, la partie arithmétique de l'article.

L'article d'Archimède confond le stéréotype de l'article géometrique abstrait que l'on s'imagine des grecs. En effet, on ne s'attend pas à un article qui décrit une experience astronomique, qui prétend que la terre est ronde et tourne autour du soleil, ou qui décrit des nombres énormes. Le lecteur devrait maintenant être convaincu de s'arrêter ici et de lire les œuvres d'Archimède!

Dans cet article, je me contenterai de décrire le système de numération développé par Archimède et son application au problème du sable. Je vais aussi proposer une théorie qui explique pourquoi Archimède s'est arreté là ou il l'a fait. Voici le problème arithmétique posé par les données d'Archimède.

Hypothèses physiques d'Archimède :

- Au plus 10000 grains de sable dans un grain de pavot (sphérique).
- Au plus 40 diamètres de grains de pavot dans le diametre d'un doigt.
- Au plus 10000 diamètres de doigt dans un stade (mesure ancienne de distance $\approx$ 200 mètres).
- La terre est une sphère dont le périmètre est inferieur à trois millions de stades.
- La distance entre le centre de la terre et le centre du soleil est inférieur à 10000 diamètres de la terre.
- L'univers est une sphère, le soleil est au centre, et la terre tourne autour du soleil dans un cercle. Le rapport du diamètre de l'univers au diamètre de l'orbite de la terre autour du soleil est inférieur au rapport entre le diamètre de l'orbite de la terre et le diamètre de la terre.

Hypothèses géometriques d'Archimède :

- Le périmetre d'un cercle est supérieur au triple de son diamètre.
- Le volume d'une sphère est proportionel au cube de son diamètre.

Exercice 1. *D'après les hypothèses d'Archimède, trouvez une borne superieure pour le nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable.*

Les nombres d'Archimède

En principe, cet exercice ne devrait pas poser de difficultés grave pour le lecteur (à par le rude choc de faire un problème de lycée). Par contre, cela posait des difficultés énormes pour les contemporains d'Archiméde. La raison est que le système de numeration grec ne contenait pas de nombre plus grand que cent millions, et il n'avaient pas de système formel tel que l'algébre pour faciliter l'écriture et manipulation de grands nombres. En effet, les grecs utilisaient la *myriade* qui valait dix–mille, et leur nombre le plus grand était la myriade de myriade. Ce nombre est aussi le plus grand qui apparait dans la bible, dans deux passages, Daniel 7:10 et Apocalypse 5:11.

> *Et ma vision se poursuivit. J'entendis la voix d'une multitude d'Anges rassemblés autour du trône, des Vivants et des Viellards – ils se comptaient par myriades de myriades et par milliers de milliers.*
>
> Apocalypse 5:11

Le premier problème que doit résoudre Archimède est de produire des nombres plus grand que la myriade de myriade.

Le procedé d'Archimède est le suivant : Il appelle les nombres entre un et la myriade de myriade les *premiers nombres* (ceci entraine une confusion avec les nombres premiers 2, 3, 5,. . . , même en grec). Ensuite il définit les *deuxièmes nombres* dons l'unité est la myriade de myriade, et dont le plus grand est une myriade de myriade d'unités. Ensuite sont les *troisièmes nombres,* ainsi de suite jusqu'aux *myriade de myriadièmes nombres.* (Ma traduction de ce dernier nombre est plus fidèle que celle des traductions précédente, et cette différence jouera un rôle critique dans l'analyse si–dessous.)

Pour l'application au sable, ces nombres sont largement suffisant, mais Archimède veut démontrer qu'il peut aller plus loin, et surtout plus loin qu'il est nécessaire pour les applications physique.

> **Caractéristiques d'Archimède :** • Originalité • Rigueur • Competition • Isolation

Donc, Archimède appelle la suite des nombres construit jusqu'à au myriade de myriadième nombres les nombres de la *première période.* Ensuite, il continue par nommant le plus grand nombre de la première periode, l'unité de la *seconde période.* Il continue ainsi jusqu'à la *myriade de myriadième période.* Il s'arrete au plus grand nombre : *une myriade de myriades unités des myriade de myriadièmes nombres de la myriade de myriadième période.*

> Τὰς μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μυρίας μυριάδας.

Exercice 2. *D'après les hypothèse d'Archimède et en utilisant son système de numération, trouvez une borne supérieure pour le nombre de grains de sable dans un univers rempli de sable.*

Pour trouver la reponse, il faut une méthode de multiplier les nombres d'Archimède (la loi des exposantes $10^a 10^b = 10^{a+b}$). Archimède donne cette loi ainsi

> Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que certains de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des facteurs d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité, et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés de l'unités.

Traduction modèrne

Ceci peut paraitre très confus et le dernier extrait démontre la difficulté d'éxprimer ces concepts sans avoir la notation symbolique de l'algébre. Donc, il est beaucoup plus facile de comprendre cela en utilisant la notation algébrique. Soit $\Omega = 10^8$ la myriade de myriade = dix–mille. Les premiers nombres sont l'ensemble $\{1, \ldots, \Omega\}$. Les seconds nombres sont l'ensemble $\{\Omega, \ldots, \Omega^2\}$, les troisièmes nombres sont $\{\Omega^2, \ldots, \Omega^3\}$ et ainsi de suite. C'est à dire, les n–ièmes nombres sont l'ensemble $\{\Omega^{n-1}, \ldots, \Omega^n\}$. On peut constater que les myriade de myriadièmes nombres sont l'ensemble $\{\Omega^{\Omega-1}, \ldots, \Omega^\Omega\}$.

Le nombre le plus grand construit ainsi est Ω^Ω. Ceci est tout à fait naturel : etant donné un nouveau symbole de numeration A, on devrait naturellement pouvoir compter jusqu'à A^A. C'est à dire, étant donné un nouveau symbole A qui represente un grand nombre, on forme la suite $A_1 = A$, $A_2 = A^2$, $A_3 = A^3$, et le plus grand nombre avec *un seul* souscrit est $A_A = A^A$.

Par exemple, notre système de numération pour les grand nombres est basé sur celui proposé par Nicolas Chuquet en 1484 [Pour la Science, Mai 2000, page 105] et qui utilise le nouveau symbole *illion.* Ainsi $M = 10^6$ est un million, M^2 est un *billion,* M^3 est un *trillion,* et ainsi de suite : un n*–illion,* est M^n. Le plus grand nombre simple de cette forme est un *million–illion,* c'est à dire M^M.

Dans la deuxième étape, Archimède introduit les *périodes* dont la base est $\Pi = \Omega^\Omega$, le plus grand nombre construit jusque là. D'après la remarque précédente, il devrait, en principe, continuer jusqu'à Π^Π.

Archimède definit les premiers nombres de la seconde période comme l'ensemble $\{\Pi, \ldots, \Omega\Pi\}$, les seconds nombres de la seconde période $\{\Omega\Pi, \ldots, \Omega^2\Pi\}$, et ainsi de suite. C'est à dire, les n–ièmes nombres de la seconde période seront $\{\Omega^{n-1}\Pi, \ldots, \Omega^n\Pi\}$. Ainsi, les Ωièmes nombres de la seconde période seront l'ensemble $\{\Omega^{\Omega-1}\Pi, \ldots, \Omega^\Omega\Pi = \Pi^2\}$.

Maintenant, Π^2 est pris comme l'unité des nombres de la troisième période, qui seront donc l'ensemble $\{\Pi^2, \ldots, \Pi^3\}$. De la même façon, les nombres de la n–ième période seront l'ensemble $\{\Pi^{n-1}, \ldots, \Pi^n\}$.

Le système archimèdien est décrit par

$$
\text{Première période}\left\{\begin{array}{l}
\overbrace{1,\ldots,\Omega}^{\text{1ers nombres}}\ ,\\[2ex]
\overbrace{\Omega,\ldots,\Omega^2}^{\text{2èmes nombres}}\ ,\\[2ex]
\overbrace{\Omega^2,\ldots,\Omega^3}^{\text{3ièmes nombres}}\ ,\\[2ex]
\quad\vdots\qquad\vdots\\[2ex]
\overbrace{\Omega^{n-1},\ldots,\Omega^n}^{n\text{ièmes nombres}}\ ,\\[2ex]
\quad\vdots\qquad\vdots\\[2ex]
\overbrace{\Omega^{\Omega-1},\ldots,\Omega^\Omega=\Pi}^{\Omega\text{ièmes nombres}},
\end{array}\right.
,\quad \text{deuxième période}\left\{\begin{array}{l}
\overbrace{\Pi,\ldots,\Omega\Pi}^{\text{1ers nombres}}\ ,\\[2ex]
\overbrace{\Omega\Pi,\ldots,\Omega^2\Pi}^{\text{2ièmes nombres}}\ ,\\[2ex]
\overbrace{\Omega^2\Pi,\ldots,\Omega^3\Pi}^{\text{3ièmes nombres}},\\[2ex]
\quad\vdots\qquad\vdots\\[2ex]
\overbrace{\Omega^{n-1}\Pi,\ldots,\Omega^n\Pi}^{n\text{ièmes nombres}},\\[2ex]
\quad\vdots\qquad\vdots\\[2ex]
\overbrace{\Omega^{\Omega-1}\Pi,\ldots,\Omega^\Omega\Pi=\Pi^2}^{\Omega\text{ièmes nombres}}
\end{array}\right.
,\ldots,
$$

$$
\ldots,\ \Omega\text{ième période}\left\{\begin{array}{l}
\overbrace{\Pi^{\Omega-1},\ldots,\Omega\Pi^{\Omega-1}}^{\text{1ers nombres}},\\[2ex]
\overbrace{\Omega\Pi^{\Omega-1},\ldots,\Omega^2\Pi^{\Omega-1}}^{\text{2ièmes nombres}},\\[2ex]
\overbrace{\Omega^2\Pi^{\Omega-1},\ldots,\Omega^3\Pi^{\Omega-1}}^{\text{3ièmes nombres}},\\[2ex]
\quad\vdots\qquad\vdots\\[2ex]
\overbrace{\Omega^{n-1}\Pi^{\Omega-1},\ldots,\Omega^n\Pi^{\Omega-1}}^{n\text{ièmes nombres}},\\[2ex]
\quad\vdots\qquad\vdots\\[2ex]
\overbrace{\Omega^{\Omega-1}\Pi^{\Omega-1},\ldots,\Omega^\Omega\Pi^{\Omega-1}=\Pi^\Omega}^{\Omega\text{ièmes nombres}}\ .
\end{array}\right.
.
$$

Archimède continue donc jusqu'à Π^{Ω}, le plus grand nombre nommé dans son systeme.[1] En notation modèrne,

$$\Pi^{\Omega} = (\Omega^{\Omega})^{\Omega} = \Omega^{\Omega^2} = (10^8)^{10^8 \times 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{16}} .$$

La loi des exposante dans ce système est un peu plus compliquée par les choix d'Archimède. Elle revient à dire: *le produit de l'unité des m–ièmes nombres et de l'unité des n–ièmes nombres est l'unité des $m+n-1$–ièmes nombres.*

Quand même, Archimède donne une démonstration, qui, telle que toute démonstration grecque dans la théorie des nombres, consiste d'un exemple simple qui contient toutes les idées de la preuve.

Exercice 3. *Donnez une demonstration de la loi des exposantes d'Archimède.*

À la recherche de la période perdue

Le nombre Π^{Ω} est souvent cité comme étant le plus grand nombre consideré dans l'antiquité, mais, jusqu'à présent, il n'y a pas eu d'explication pourquoi Archimède s'est arreté ici. Vraisemblablement, il aurait du continuer jusqu'à Π^{Π}, qui est beaucoup plus grand :

$$\Pi^{\Pi} = (\Omega^{\Omega})^{\Omega^{\Omega}} = \Omega^{\Omega^{\Omega+1}} = 10^{8 \cdot 10^{8\,(10^8+1)}} ,$$

un nombre déja plus grand que $10^{10^{10^8}}$, tandis que le nombre donné par Archimède est plus petit que $10^{10^{17}}$.

La réponse me paraî t assez simple et dépend de la langue grecque ancienne ainsi que du manque de flexibilité du système Archimédien. D'abords, on doit se rendre compte qu'il y a une difference subtile mais importante entre les nombres *cardinaux* qui indiquent la *quantité* et et les nombres *ordinaux* qui indiquent *l'ordre.*

[1] Il y a donc une erreur dans l'article de Jean–Paul Delahaye, Pour La Science, Mai 2000, page 102, qui dit que Ω^{Ω} était le plus grand nombre donné par Archimède.

Cardinaux			Ordinaux		
un	=	εἱς	premier	=	πρῶτος
deux	=	δύο	deuxième	=	δεύτερος
trois	=	τρεῖς	troisième	=	τρίτος
quatre	=	τέτταρες	quatrième	=	τέταρτος
cinq	=	πέντε	cinquième	=	πέμπτος
six	=	ἕξ	sixième	=	ἕκτος
sept	=	ἑκτά	septième	=	ἕβδομος
huit	=	ὀκτώ	huitième	=	ὄγδοος
neuf	=	ἕννέα	neuvième	=	ἕνατος
dix	=	δέκα	dixième	=	δέκατος
onze	=	ἕνδέκα	onzième	=	ἑνδέκατος
douze	=	δώδέκα	douzième	=	δωδέκατος
vingt	=	εἴκοσι	vingtième	=	εἰκοστός
cent	=	ἑκατόν	centième	=	ἑκατοστός
mille	=	χίλιάς	millième	=	χιλιοστός
myriade	=	μύριάς	myriadième	=	μυριοστός
⋮		⋮	⋮		⋮
n	=	?	n–ième	=	?

Beaucoup de lecteurs connaissent ces conceptes dans la théorie des ensembles, mais ils existent depuis longtemps dans tout les languages, ainsi que l'indique la table de grec ancien. Il est important de noter l'algorithme français qui transforme un cardinal en ordinal est $n \mapsto n$–ième. Par contre, il ne paraî t pas évident que les grecs anciens avaient consideré un algorithme pour former un ordinal à partir d'un cardinal.

Pour comprendre l'importance de ce concept, retournont au système de numeration de Chuquet. On voit maintenant qu'il ne s'agit pas de la suite "un–illion, deux–illion,..., n–illion," mais de la suite "premier–illion, deuxième–illion,..., n–ième–illion". En effet, un nouveau symbole A definit une *suite* $A_1, A_2, \ldots$, ou les sous–scrits sont ordonnés. Pour définir le dernier nombre dans cette suite, il faut pouvoir dire *premier–illionième*–illion. C'est à dire, un algorithme qui transforme n'importe quel cardinal en ordinal.

Donc, si on croit que les grecs n'avaient pas de système automatique pour transformer les cardinaux en ordinaux, Archimède serait a priori limité au nombre ordinal le plus élevé dans sa langue = myriade de myriadième. Donc le nombre le plus grand qu'Archimède peux nommer en utilisant sa langue courante est la myriade de myriadième période = Π^{Ω}.

Pour soutenir cette hypothèse, on remarque qu'il parraî t assez clair qu'Archimède n'avait pas conçu sont système pour une utilisation générale, ce qui est encore plus intéressant puisque de très grands nombres apparaissent aussi dans son problème des bœufs [Pour la Science, Mai 2000, page 100]. Par exemple, à la fin de son article, Archimède écrit : *un volume myriade de myriade de myriade de fois multiple du volume du monde.* Pour être cohérent, il aurait du dire : *"un volume une unité des troisièmes nombres de fois multiple du volume du monde*". Cet exemple démontre un autre problème linguistique dans l'invention de nouveaux nombres : il faut aussi inventer un *adverbe* pour chaque nombre : "une fois, deux fois,..." (en anglais, "once, twice,...")!

On pourrait quand même faire une objection que les ordinaux se disent aussi "numero un, numero deux, etc." et qu'on lit la suite $A_1, A_2, \ldots$ comme "A un, A deux,...". De plus, la table de cardinaux et ordinaux grecs démontre qu'Archimède aurait pu facilement inventer une manière de transformer un cardinal en ordinal. Mais, c'est ici où intervient la plus importante faiblesse de son système : Archimède donne des noms à des *ensembles* de nombres et non à des nombres eux–mêmes. Ainsi, le nombre Ainsi, le grand nombre $\Pi = \Omega^\Omega$ est "l'unité de la deuxième période" et même en français modèrne, il est difficile d'écrire l'ordinal correspondant.

Un thé au harem d'Archimède

Archimède était très isolé à Syracuse, ce qui explique sa grande originalité : son invention de grand nombres n'a rien en commun avec les mathématiques de son temps. Mais son isolation est probablement résponsable pour les petites incohérences présentes dans son texte. S'il avait quelqu'un avec qui discuter ses recherches, il aurait facilement amélioré ses résultats. Il est donc intéressant de trouver des améliorations qu'Archimède lui–même aurait pu faire, sans trop le vexer bien sur.

La première remarque est qu'Archimède aurait du donner des noms directement à ses grands nombres. Par exemple, s'il avait nommé Ω^Ω *la periode* (ἡ περίοδος) alors Π^Π aurait été *la périodième période,* qu'Archiméde aurait pu nommer, en extrapolant de la table des ordinaux grecs, ἡ περίοδοστὴ περίοδος. Ainsi, le grand nombre Π^Π aurait été finalement atteint.

Mais Archimède aurait du commencer par donner des noms directement à tout ses nouveaux nombres. Une méthode directe est d'appeler la myriade de myriade *la seconde myriade* (ἡ δεύτερα μύριας), la myriade de secondes myriades *la troisième myriade* (ἡ τρίτη μύριας), et ainsi de suite jusqu'à la *myriadième myriade* (ἡ μυριοστὴ μύριας). Cette notation pour les petits cas a été utilisé par Diophante. Le grand avantage de cette méthode est une simplification de la loi des exposante : le produit d'une m–ième myriade et d'une n–ième myriade est une $m + n$–ième myriade.

Mais, si le but est simplement de nommer de très grands nombres, et non de donner un système complet de numération, on peux aller beaucoup plus loin. Donc, on commence par appeler la myriadième myriade *la grande myriade* (ἡ μεγάλη μύριας). On continue avec la grande myriadième grande myriade qu'on appelle *la très grande myriade* (ἡ μείζων μύριας). La très grande myriadième très grande myriade sera *l'énorme myriade* (ἡ μέγιστη μύριας).

On utilise de nouveau la nomenclature d'Archimède en appelant la grande myriade *la période,* la très grande myriade *la deuxième période,* l'énorme période *la troisième période.* Le procédé est clair, et on continue jusqu'à la *périodième période,* qui encore une fois sera ἡ περίοδοστὴ περίοδος. Ces périodes croissent beaucoup plus vite que les périodes définies par Archimède, mais ces nouvelles périodes ne sont plus capable d'exprimer tout les nombres.

En notation modèrne, soit $\mu = 10^4$ une myriade. Alors une grande myriade est $\mu^\mu = 10^{4\cdot 10^4}$, et la période est $\pi_1 = \mu^\mu$. Soit π_2 la deuxième période, alors utilisant la formule $(10^a)^b = 10^{ab}$, on trouve

$$\pi_2 = \pi_1^{\pi_1} = (\mu^\mu)^{\mu^\mu} = \mu^{\mu^{\mu+1}} = 10^{4\cdot 10^{4\,(10^4+1)}} > 10^{10^{10^4}} .$$

Soit π_3 la troisième période, alors

$$\pi_3 = \pi_2^{\pi_2} = (\mu^{\mu^{\mu+1}})^{\mu^{\mu^{\mu+1}}} = \mu^{\mu^{\mu+1}\,\mu^{\mu^{\mu+1}}} = \mu^{\mu^{(\mu+1)+\mu^{\mu+1}}} = 10^{4\cdot 10^{4\,[(10^4+1)+10^4\,(10^4+1)]}} > 10^{10^{10^{10^4}}} .$$

En général, $\pi_{n+1} = (\pi_n)^{\pi_n}$, et on constate que la périodième période qui est égale à π_{μ^μ} est d'un ordre de grandeur beaucoup plus élevé que les nombres conçus par Archimède.

Exercice 4. *Éstimez la taille de la périodième période.*

Corrigés des exercices

Exercice 1 : Soit D_u le diamètre de l'univers, D_o le diamètre de l'orbite de la terre autour du soleil, D_t le diamètre de la terre. La dernière hypothèse physique s'écrit

$$\frac{D_u}{D_o} \leq \frac{D_o}{D_t} .$$

L'avant derière hypothèse affirme que $D_o/D_t \leq 10000$, donc

$$D_u \leq 10^4\, D_o .$$

Encore une fois, l'hypothèse $D_o/D_t \leq 10000$ donne

$$D_u \leq 10^4 \cdot 10^4 D_t = 10^8\, D_t .$$

L'hypothèse sur le périmètre de la terre donne $D_t \leq 10^6$ stades, à cause de la première hypothèse géométrique. Donc on a

$$D_u \leq 10^8 \cdot 10^6\,\text{stades} = 10^{14}\,\text{stades} .$$

Puisqu'il y a moins de 10000 diamètre de doigts dans un stade, on a

$$D_u \leq 10^4 \cdot 10^{14}\, D_d = 10^{18}\, D_d ,$$

où D_d est le diamètre d'un doigt. Puisqu'il y a moins de 40 diamètre grains de pavot dans un doigt

$$D_u \leq 40 \cdot 10^{18}\, D_p = 4 \cdot 10^{19}\, D_p ,$$

où D_p est le diamètre d'un grain de pavot. D'après la deuxième hypothèse géométrique, le volume V_u de l'univers satisfait

$$V_u \leq (4 \cdot 10^{19})^3\, V_p = 64 \cdot 10^{57}\, V_p \leq 10^{59}\, V_p ,$$

où V_p est le volume d'un grain de pavot. D'après la première hypothèse, un grain de pavot contient au plus 10^4 grains de sable, donc le nombre de grains de sable dans l'univers est moins que

$$10^{59} \cdot 10^4 = 10^{63} .$$

Il est intéressant de noter que le diamètre maximal de l'univers d'après Archimède est 10^{14} stades. Ceci donne, d'après l'éstimation acceptée qu'une stade $\approx$ 200 mètres, un rayon de l'univers $\approx 10^{12}$ kilomètres. Cela est environ une année de lumière, donc environ la distance aux étoiles les plus rapprochées.

Exercice 2 : La méthode est exactement similaire et la réponse est mille myriades d'unités de huitièmes nombres.

Exercice 3 : D'après la notation d'Archimède, l'unité des m–ièmes nombres est égale à 10^{m-1} et l'unité des n–ièmes nombres est égale à 10^{n-1}. Donc, leur produit est égal a 10^{m+n-2}, qui dans le système Archimédien est égal à l'unité des $m+n-1$–ièmes nombres.

Exercice 4 : On remarque que dans chaque itération la taille de la tour des exponentielles dans la période augmente de un. C'est à dire, si on commence par $\pi_1 > 10^{10}$, on a $\pi_2 > 10^{10^{10}}$, $\pi_3 > 10^{10^{10^{10}}}$, et en géneral, $\pi_n > 10^{10^{\cdot^{\cdot^{10}}}}$ où la tour d'exponentielles a $n+1$ termes. Puisque la périodième période est égale à π_{μ^μ}, elle est supérieure à $10^{10^{\cdot^{\cdot^{10}}}}$ où la tour à $10^{4\cdot 10^4}+1$ termes.

La périodième période est supérieure à une tour d'exponentielle $10^{10^{\cdot^{\cdot^{10}}}}$ où la tour a plus de 1 suivi de quarante mille zeros termes.

Pour confirmer qu'il a tout compris, le lecteur devrait maintenant trouver une borne supérieure simple pour la périodième période.

References

[1] Archimède, *Oeuvres, 3. vol.,* texte établi et traduit par C. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1970–71.

[2] La Bible de Jérusalem, Les Éditions du Cerf, Paris, 1998.

[3] M. Charef, *Un thé au harem d'Archimède,* écrit et realisé par Mehdi Charef, M& R films 1985.

[4] Ératosthène, *Le Ciel : mythes et histoire des constellations : les Catastèrismes d'Ératosthène,*

[5] G. Grasshoff, *The History of Ptolemy's Star Catalogue,* Springer Verlag, New York 1990.

[6] T.L. Heath, *Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus,* Dover, New York 1981.

[7] T.L. Heath, *Diophantus of Alexandria, a study in the history of Greek algebra,* Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[8] D.E. Knuth, Supernatural Numbers, dans *The Mathematical Gardner,* D.A. Klarner, éditeur, Wadsworth, Belmont, CA, 1981, 310–325

[9] Pindare, *Olympique,* texte bilingue établi et traduit par Aimé Puich, Les Belles Lettres, Paris, 1970.

[10] I. Vardi, *Archimedes' Cattle Problem,* American Math. Monthly **105** (1998), 305–319.

[11] I. Vardi, *Archimedes, the Sand Reckoner,* prépublication IHES M/98/78.